

## **Eksempler på aktiviteter med TI Interactive!**

Disse aktivitetene er skrevet ut direkte fra programmet. Skulle du ønske å prøve de i praksis kan du laste ned en demoversjon (30 dager) av programmet fra

<http://education.ti.com/us/product/software/tii/features/features.html>

Aktivitetene kan da hentes som Ti Interactive!-dokumenter på

<http://www.oisteing.com/ti> og brukes direkte i programmet.

Øistein Gjøvik  
Novemberkonferansen 2005  
[oisteing@stud.ntnu.no](mailto:oisteing@stud.ntnu.no)

Kilder brukt til aktivitetene:

Kjøsnes/Kvammen/Tvete: Prosjektboka

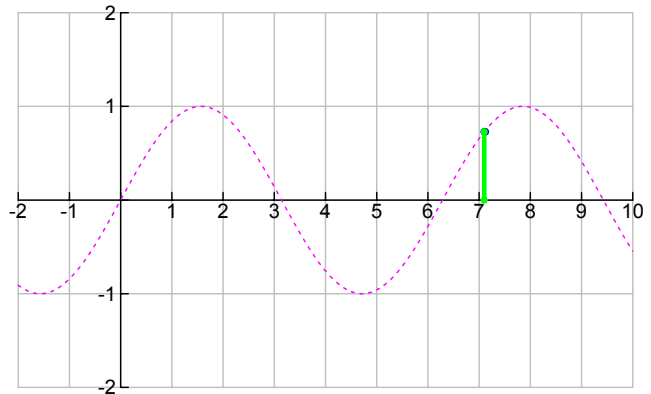
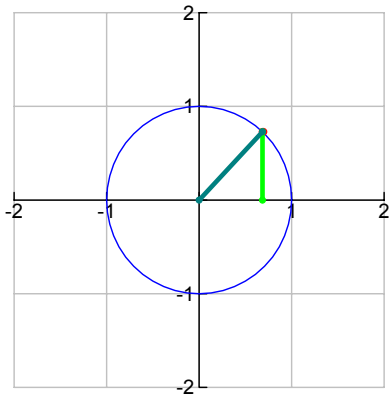
Reed: Fundamental ideas of real analysis

Körner: Fourier Analysis

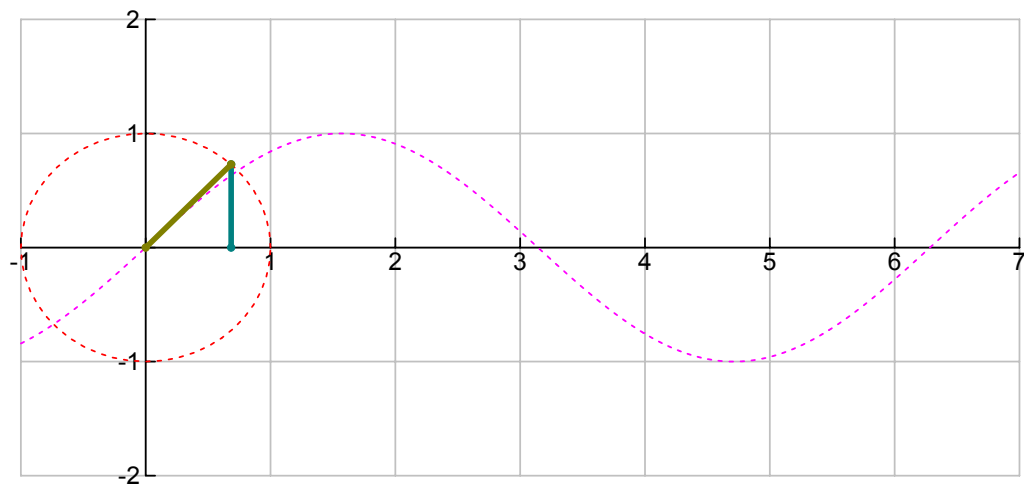
Edwards/Penney: Calculus with analytic geometry

## Sammenhengen mellom $\sin(x)$ og enhetssirkelen

Ny verdi for a:



Vi kan også sette de to grafene inn i samme koordinatsystem



Her kan vi legge til en eller annen slags utregning for å måle lengden av linjene hvis vi ønsker det

## Nedbør i millimeter

| Mnd | Tyholt | Fleslan |  |  |
|-----|--------|---------|--|--|
| 1   | -3.2   | 0.8     |  |  |
| 2   | -2.5   | 0.7     |  |  |
| 3   | 0      | 2.3     |  |  |
| 4   | 3.2    | 4.8     |  |  |
| 5   | 8.7    | 9.3     |  |  |
| 6   | 12     | 12.1    |  |  |
| 7   | 13.1   | 13.3    |  |  |
| 8   | 13     | 13.3    |  |  |
| 9   | 9.3    | 10.6    |  |  |
| 10  | 5.8    | 8       |  |  |
| 11  | 0.7    | 3.9     |  |  |
| 12  | -1.6   | 1.8     |  |  |
|     |        |         |  |  |
|     |        |         |  |  |
|     |        |         |  |  |

Sinusregresjon for Flesland:

Sinusoidal Regression

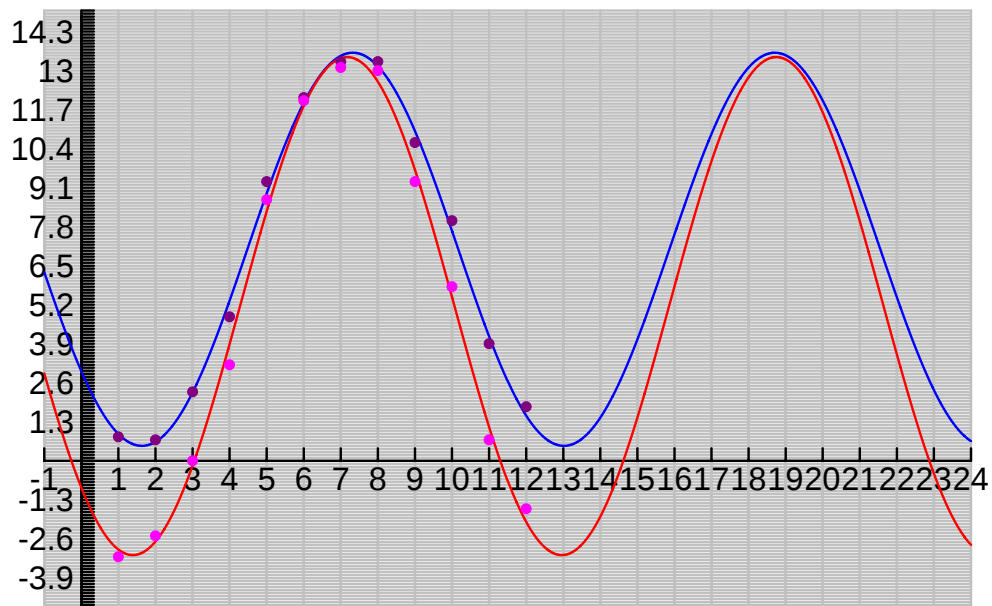
$$\text{regEQ2}(x) = 8.29546 \cdot \sin(.542965 \cdot x - 2.32505) + 5.15401$$

Sinusregresjon for Tyholt:

Sinusoidal Regression

$$\text{regEQ}(x) = 6.54874 \cdot \sin(.552 \cdot x - 2.47254) + 7.04668$$

Rød kurve gir oss temperaturer gjennom året for Trondheim, mens den blå gir oss tilsvarende for Bergen.



## Heksehatten

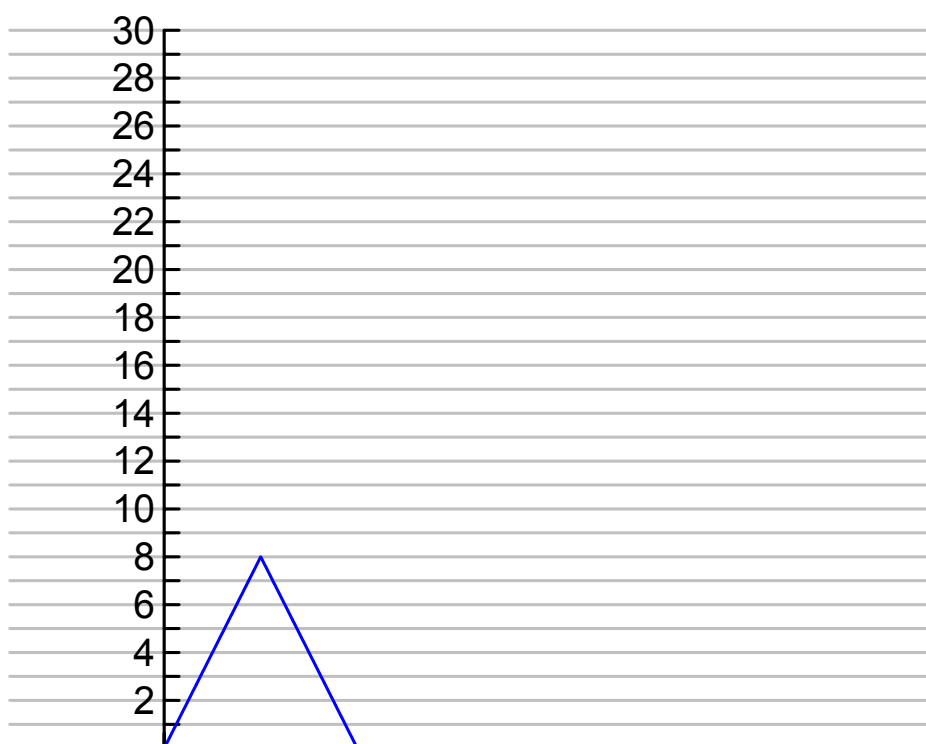
Her justerer vi  $n$ , som er indeksen i funksjonsfølgen:   

3

Definerer så funksjonsfølgen  $f(n, x)$ :

$$f(n, x) := \begin{cases} 2 \cdot 4^n \cdot x & 0 \leq x \text{ and } x \leq \frac{1}{2^{(n+1)}} \\ -2 \cdot 2^n \cdot (2^n \cdot x - 1) & \frac{1}{2^{(n+1)}} < x \text{ and } x \leq \frac{1}{2^n} \\ 0 & x > \frac{1}{2^n} \end{cases}$$

Det man kan observere er at funksjonsfølgen konvergerer punktvis mot 0 (for hver fiksert  $x > 0$ ), men aldri blir helt lik grensefunksjonen  $f=0$ , konvergensen er ikke uniform. Vi observerer også at arealet under kurven holder seg konstant lik  $1/2$ .



$$\int_0^{1/2^{(n+1)}} (2 \cdot 4^n \cdot x) dx + \int_{1/2^{(n+1)}}^{1/2^n} (-2 \cdot 2^n \cdot (2^n \cdot x - 1)) dx = \frac{1}{2}$$

## En måte å se sammenhengen i addisjon av funksjoner.

Definer først en funksjon sammensatt av to andre

$$g(x) := d \cdot x^2 \text{ og } h(x) := a \cdot \sin(b \cdot x - c)$$

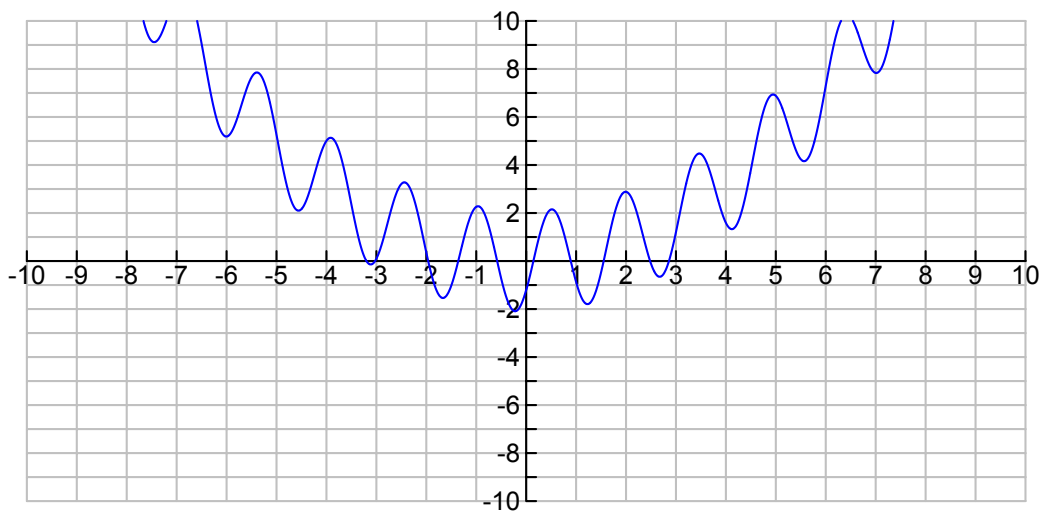
Sett så sammen disse to funksjonene til en:  $f(x) := g(x) + h(x)$

Juster parametrene a,b,c og d ved å dra i disse glidebryterne:



... og så tegner vi tilslutt grafen:

$$f(x) \quad 2.1 \cdot \sin(4.3 \cdot x - 6.9) + .2 \cdot x^2$$



Merk at vi ved å sette  $d=0$  får en vanlig sinusfunksjon

## Fourieranalyse med TI Interactive!

Vi må først definere funksjonen vi skal utføre Fourieranalysen på. La oss si  $f(x) := x$

Så trenger vi definisjonen av Fourierkoeffisientene. Disse er  $a(n) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cdot \cos(nx)) dx$

og  $b(n) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cdot \sin(nx)) dx$ . Vi lager en variabel som sier hvor mange ledd vi skal ha

med i partialsummen, for eksempel  $p$ . Dra i denne glidekontrollen for å justere graden til det

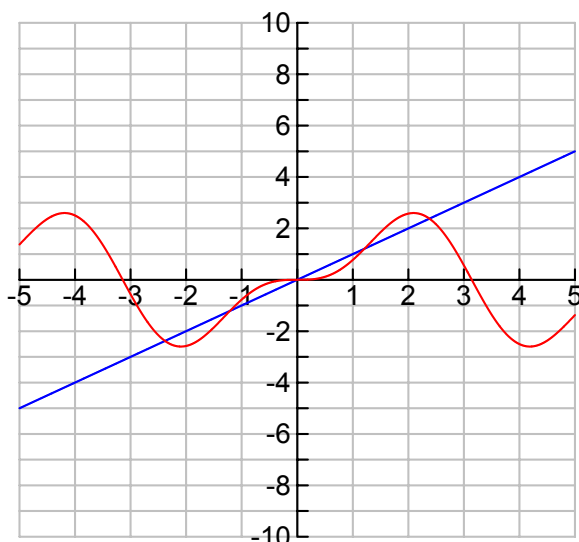
største leddet.   $p = 2$

Partialsummen er gitt ved  $s(x) := \frac{1}{2}a(0) + \sum_{i=1}^p (a(i) \cdot \cos(ix) + b(i) \cdot \sin(ix))$ . Vi kan da tilslutt

tegne opp grafen til  $f$  og partialsummen i samme koordinatsystem.

Prøv ut forskjellige funksjoner som  $f$  og se hvordan dette påvirker Fourierrekka. Prøv for eksempel med  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $x^4$ ,  $\sin x$ ,  $\ln x$ ,  $\tan x$ ,  $\text{abs}(x)$  osv.

Den blå kurven er grafen til  $f$ , mens den røde kurven er grafen til  $s$ .



Dokumentet (grafene) blir automatisk oppdatert når du har forandret på funksjonen  $f$  først i dokumentet. Men husk at beregning av Fourierkoeffisienter er krevende, så ikke velg altfor mange ledd i partialsummen (en  $p$ -verdi på ca. fem er ofte nok til å få en bra tilnærming).

Også intervallet man skal få fourierrekka til å likne på  $f$  på er tilfeldig, men fra  $-\pi$  til  $\pi$  er ofte gunstig av regnetekniske årsaker. Nevner tilslutt at man ikke kan utvide

ALLE funksjoner i fourierrekker, men

nesten. Det vil si ALLE funksjoner har en Fourierrekka, men det er ikke alltid at Fourierrekka vil likne på funksjonen. Men til vårt formål holder det å vite at funksjonene vi har bruk for og kommer borti i praksis ikke byr på noen problemer. De såkalt "vanskelige" funksjonene er stort sett obskuriteter som ikke er pensum innenfor vanlig skole eller studium.

## Oppgaver:

**Oppgave 1:** Finn uttrykk for generelle Fourierrekker på intervallet  $-L$  til  $L$  (i stedet for  $-\pi$  til  $\pi$ ) og lag et dokument der du kan endre  $L$  og få grafen automatisk justert.

**Oppgave 2:** Sammenlikn Fourier-utviklingen av funksjonene  $x$  og  $|x|$ . Hva observerer du? Hva kan være årsaken til dette?

**Oppgave 3:** Klarer du å illustrere Gibbs fenomen?

## Svar og tips på oppgavene

### Oppgave 1

Generelle Fourierrekker finner vi på samme måte. Definer funksjonen  $f(x) := \frac{1}{2}x$ . Bestem intervallet vi definerer funksjonen på ved å flytte venstre endepunkt med å dra i glidekontrollen:

  $L = 2$

Lag så Fourierkoeffisientene:

$$a(n) := \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right) dx \text{ og } b(n) := \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right) dx$$

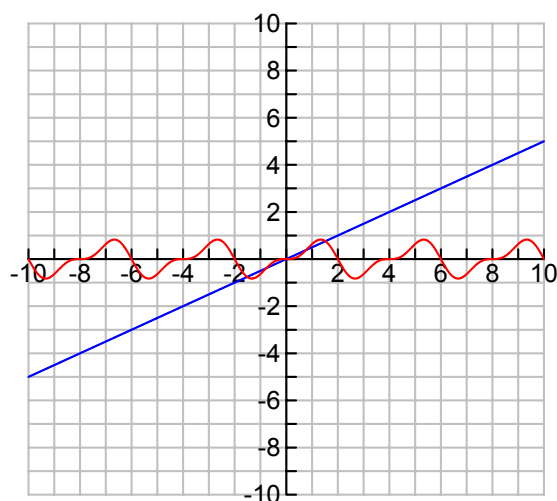
Lag til slutt partialsummen.

Sett først det største leddet til grad   $p = 2$

$$s(x) := \frac{1}{2}a(0) + \sum_{i=1}^p \left( a(i) \cdot \cos\left(\frac{i \cdot x \cdot \pi}{L}\right) + b(i) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot x \cdot \pi}{L}\right) \right)$$

Tilslutt tegner vi opp funksjonen

$f$  sammen med partialsummen.



### Oppgave 3

Vi illustrerer Gibbs fenomen ved å lage en Fourier-framstilling av en av de enkleste

funksjonene vi har:

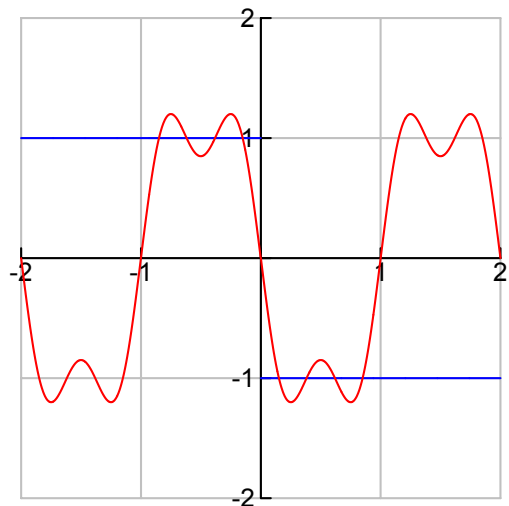
Hvis  $f(x) := \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$  og  $L := 1$   $p := 3$  og så får vi følgende graf.

$$a(n) := \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right) dx$$

$$b(n) := \frac{1}{L} \int_{-L}^L \left( f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \right) dx$$

$$s(x) := \frac{1}{2} a(0) + \sum_{i=1}^p \left( a(i) \cdot \cos\left(\frac{i \cdot x \cdot \pi}{L}\right) + b(i) \cdot \sin\left(\frac{i \cdot x \cdot \pi}{L}\right) \right)$$

Nå kan du forsøke å justere graden til  $p$  igjen. Ikke velg  $p$  for stor, da kommer det til å ta lang tid



å regne ut!

# Finn funksjonsgrafen!

Klikk på en av glidekontrollene under og bruk knappene på sidene til å variere variablene  $a$ ,  $b$  og  $c$ . Merk at kurven og funksjonsuttrykket varierer i henhold til dine endringer. Prøv å finne samme graf som datapunktene som er oppgitt!

a

b

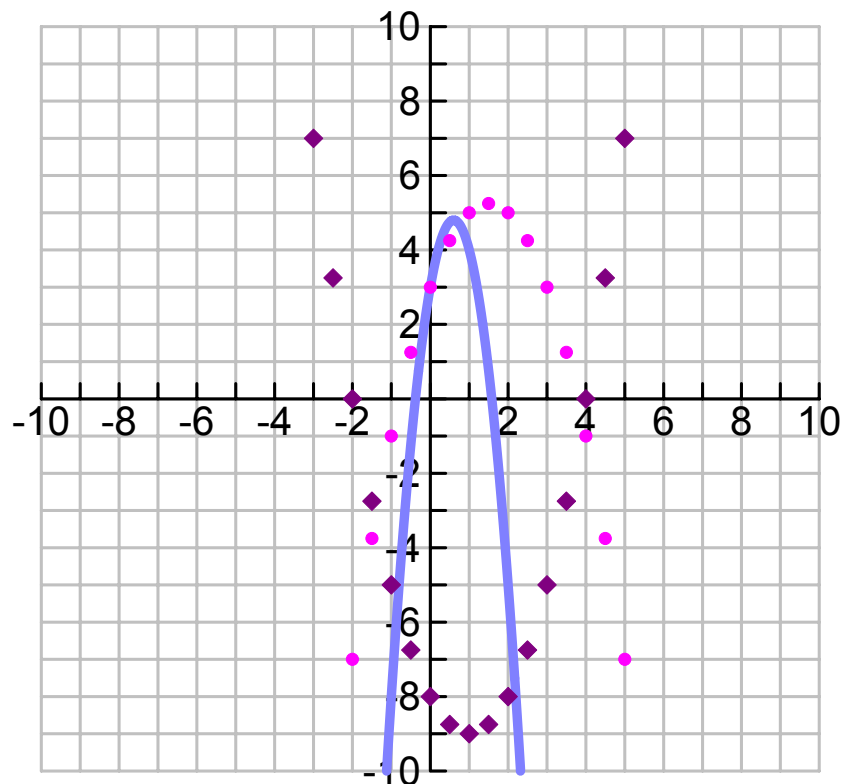
c

$$a = -5 \quad b = 6 \quad c = 3$$

$$f(x) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$f(x) = -5 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 3$$

## Finn Grafen



## Undersøke Taylorpolynomer

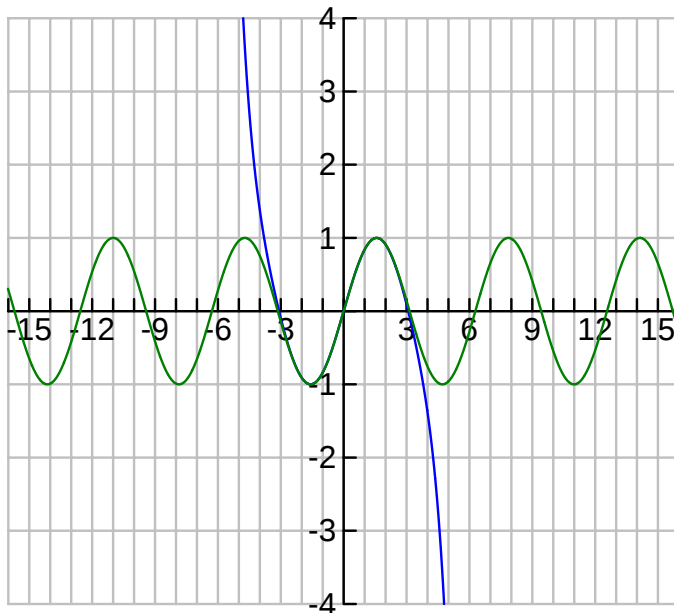
Sett graden til polynomet her: n

Lager først Taylorrekke til  $\sin(x)$   $f(x) := \text{Taylor}(\sin(x), x, n)$

Denne ser da slik ut :  $f(x) = \frac{-(x^7)}{5040} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x$

Tegner Taylorrekke-funksjonen og  $\sin(x)$  i samme koordinatsystem. Vi ser at

Taylorutviklingen IKKE "holder følge med"  $\sin(x)$  i like mange topper/bunner som graden av polynomet skulle tilsi.



En faktorisering indikerer at vi ikke kan forvente å finne like mange nullpunkter som graden av Taylorpolynomet.

$$\text{factor}(f(x), x) = \frac{-x \cdot (x - 3.07864) \cdot (x + 3.07864) \cdot (x^4 - 32.522 \cdot x^2 + 531.756)}{5040}$$